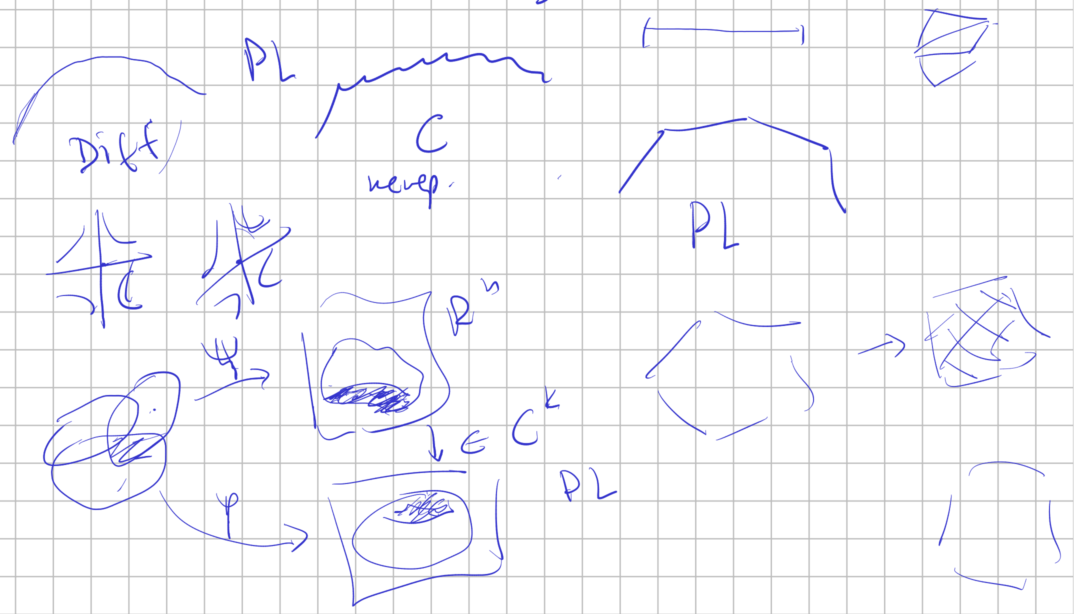
Кусково-лінійна топологія / Piese-wise linear / PL
"Відтинково лінійна"

Поліедри



Симплекс. Лінійно незалежна система точок в $\mathbb{R}^n$

$A = \{x_0 \dots x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \le n+1$. A — ЛНЗ сист. точок, якщо вектори $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$ ... $x_k - x_0$ — ЛНЗ

> Озн. $a_1 \dots a_k$ — ЛЗ якщо $\exists$ числа $\alpha_1 \dots \alpha_k$, не всі $= 0$ такі, що $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$.
> Якщо таких $\{\alpha_i\}$ не існує, то $\{a_1 \dots a_k\}$ — ЛНЗ

0) $A = \{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ — ЛНЗ

1) $A = \{x_0, x_1\}$ — ЛНЗ $\iff x_1 \neq x_0$

2) $A = \{x_0, x_1, x_2\}$

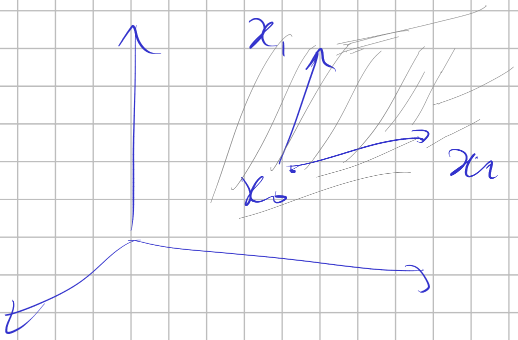
$x_1 - x_0 \parallel x_2 - x_0$. На $\mathbb{R}^1$ $\forall$ ЛНЗ сист. точок складається не більше ніж з 2-х точок

$A = \{x_0, x_1, x_2\}$

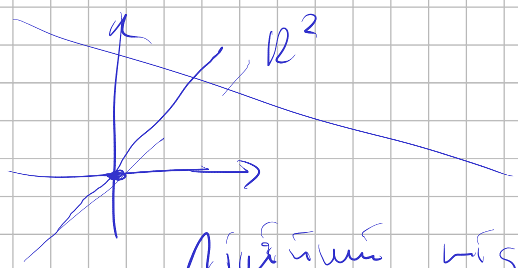
Лема. Нехай $A = \{x_0 \dots x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ і B = переставлене точки A $= \{x_1, x_0, x_2 \dots x_k\}$

- A − АНЗ $\Longleftrightarrow$ B − АНЗ
- Нехай L − перетин всіх $(n-1)$площин в $\mathbb{R}^n$ які містять A

A − АНЗ $\Longleftrightarrow$ $\dim L = k$



Афінний підпростір



Лінійний підпр

$(n-1)$-площина (гіперплощина)

$$a_1x_1 + \dots a_n x_n = a_{n+1}$$

Симплекс. Нехай $A = \{x_0 \dots x_k\}$ − АНЗ система в $\mathbb{R}^n$

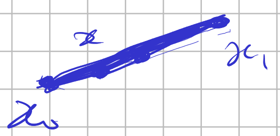
Тоді $\bar{A} = \{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$

називається симплексом породженим A

(натягнутий на множину A)

$A = \{x_0\}$ • − точка

$A = \{x_0, x_1\}$



$1-t \quad t$

$\alpha_0 + \alpha_1 = 1$

$\underbrace{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1}$

$x = \underbrace{(1-t)x_0 + t\, x_1}$

$$\frac{x_0 + \frac{x_0 + x_1}{2}}{2} = \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{4}x_1$$

$\alpha_0 = 0 \quad x = x_1$

$\alpha_1 = 0 \quad x = x_0$

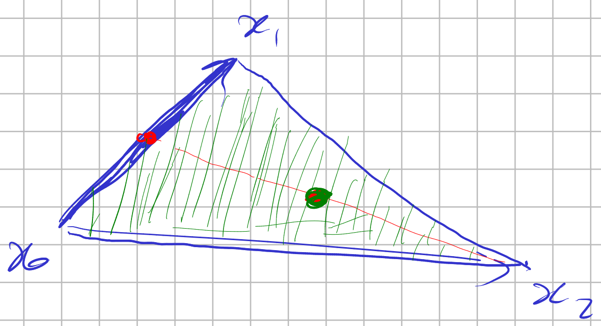
$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$

α_0 і α_1 − "ваги" x_0 і x_1 в т. x

α_0 і α_1 − називають барицентричними координатами точки x

$A = \{x_0, x_1, x_2\}$

$\overline{A}$

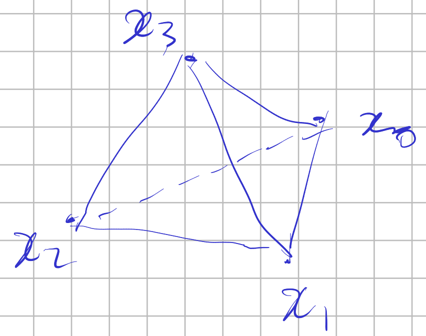


$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_i \geq 0$

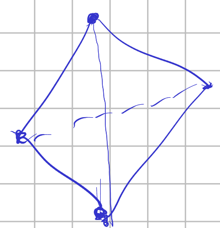
нехай $\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_1 \qquad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$

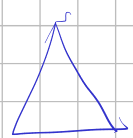
$$\frac{1}{4} x_0 + \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \frac{1}{2} x_2$$

$A = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$



$\overline{A}$

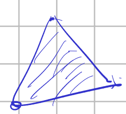




$\boxed{A \text{ — ЛНЗ тоді } \overline{A} \text{ — симплекс}}$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \notin \mathbb{R}^2$

$x_1 - x_0 \qquad x_2 - x_0 \qquad x_3 - x_0$



Лема. $A = \{x_0, \dots, x_k\}$ — система точок в $\mathbb{R}^n$

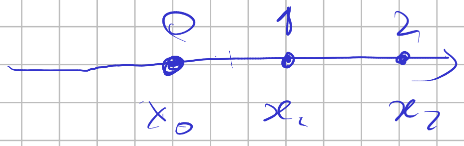
$\overline{A} = \{\alpha_1 x_0 + \dots + \alpha_k x_k \mid \sum \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0\}$

Тоді наступні умови еквів

1. A — ЛНЗ
2. $\forall x \in \overline{A}$ представлення $x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i$ єдине

($\exists!$ набір таких $\alpha_0 \dots \alpha_k$)

$A = \{x_0\ x_1\ x_2\} \subset \mathbb{R}^1$

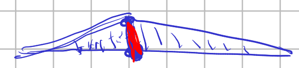


$1 = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 = (0, 1, 0)$ – барицентр. коорд.

$0\cdot x_0 + 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2$

$1 = \underbrace{0{,}25}\, x_0 + \underbrace{0{,}5}\, x_1 + \underbrace{0{,}25}\, x_2 \qquad (0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}25)$

$0 + 0{,}5 + 0{,}5$



Вершини, грані

$A = \{x_0 \dots x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ – АНЗ

$\bar A$ – симплекс $\left\{x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \geq 0\ \ \sum \alpha_i = 1\right\}$

• якщо $\alpha_i = 1 \Rightarrow x = x_i = (0 \dots \underset{i}{1} \dots 0)$

$\alpha_j = 0$ при $j \neq i$

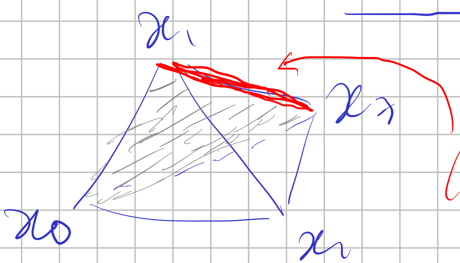
• $B \subset A$ $\quad \bar B = \{\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_\ell x_\ell + 0 x_{\ell+1} + \dots + 0 x_k \mid \sum \alpha_i = 1\ \ \alpha_i \geq 0\}$

$A\ \ \{\underbrace{x_0 \dots x_\ell}_{B}\ x_{\ell+1} \dots x_k\}$

Тоді $\bar B \subset \bar A$

$\bar B$ – назив. ℓ-вимірна грань A

$x_0 x_1 x_3$



$(0, \alpha_1, 0, \alpha_3)$

$\bar A$ є k-гранню себе.

① Скільки 0-граней в $A = \{x_0 \dots x_k\}$ = $k+1$

② 1-граней $\quad C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)\cdot k}{2}$

③ A = 3-симплекс з 4-верш.

dim	-1	0	1	2	3
число граней	1	4	6	4	1

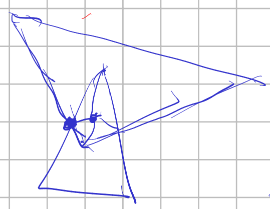
$\varnothing$ — це (-1)-грань A.

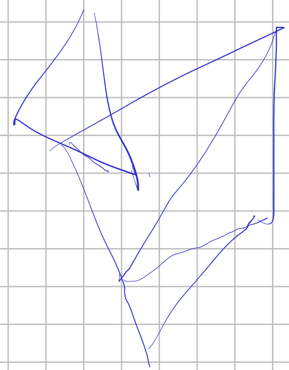
$$\boxed{\dim \varnothing = -1}$$

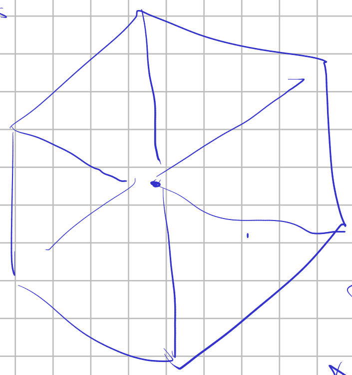
за означенням

Л.С. Понтрягін Основи комбінаторної топології

110







K — опукла

∂K — поліедр, має тріангуляцію

Тоді K має тріанг.

[Рурк Сандерсон Кусочно-линейная топология

"Хирш Дифф. топ. Милнор Теор. об h-кобордизме Теория Морса

Афінний простір

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$$\mu(a, b, c) \equiv (a+c, b+c)$$

$$(a,b)+c$$

Афін. пр-р

$$\boxed{A_n = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}^n}$$

$$(a,b) \sim (a+c, b+c)$$

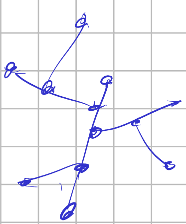
$$(a,b) \approx (c,d) \iff b-a=d-c$$

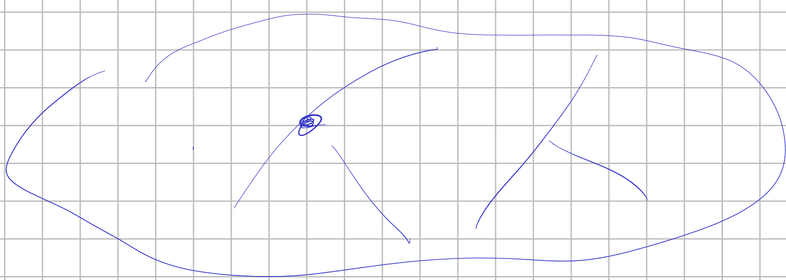
$$G \times G \times G \longrightarrow G \times G$$

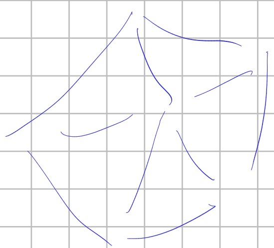
$$a, b, c \Longrightarrow (ac, bc)$$

"Афінного пр-ру G"

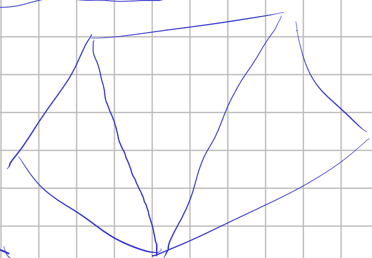
$$(G \times G)/G \qquad (a,b) \sim (c,d) \iff ab^{-1} = cd^{-1}$$

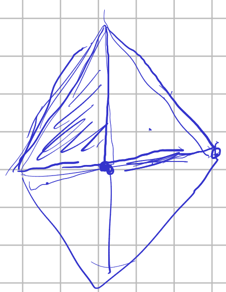


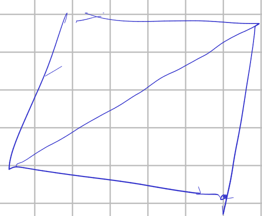


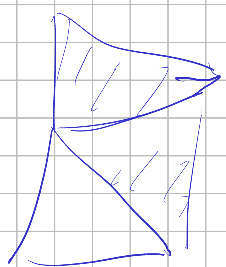


$$\underbrace{В - Р + Г}_{} = 2$$ = ейлерова характеристика









Теорема Брауера про нерух. точку

$D^2 \xrightarrow{f} D^2$ непер. то $\exists x \in D^2$ $\underline{f(x)=x}$