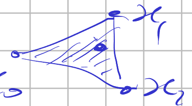
Лекція 2

Симплекс $\quad A \subset \mathbb{R}^n \quad A = \{x_0 \dots x_k\}$

$x_1 - x_0, \ x_2 - x_0 \dots x_k - x_0$ — ЛНЗ

$$\bar{A} = \{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid \sum \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \geq 0\}$$



$(\alpha_0 \dots \alpha_k)$ — барицентричні координати

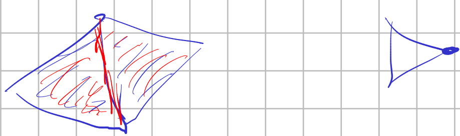
- Поліедр. Вкладення k-вимірного поліедра в $\mathbb{R}^{2k+1}$

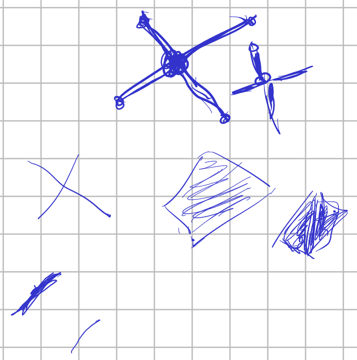
Чітні $M^k \subset \mathbb{R}^{2k+1}$

$\forall f: M^k \to \mathbb{R}^{2k+1}$

$M^1 \quad \mathbb{R}^{2\cdot 1+1=3}$

Нехай $\bar{A}$ і $\bar{B} \subset \mathbb{R}^n$ два симплекси.
$\bar{A}$ і $\bar{B}$ — правильно розміщені, якщо
або $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$
або $\bar{A} \cap \bar{B}$ — спільна грань.



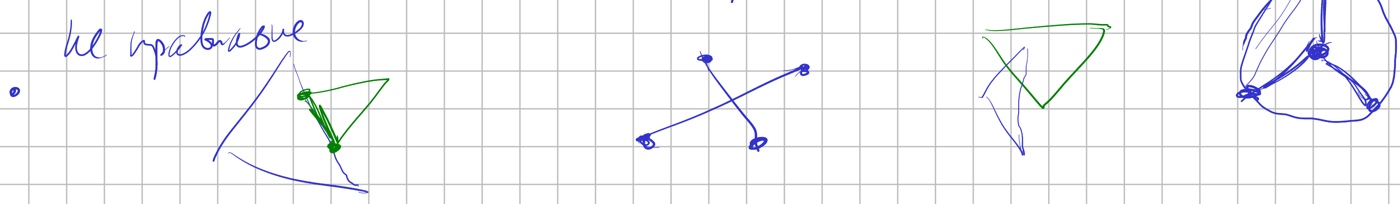


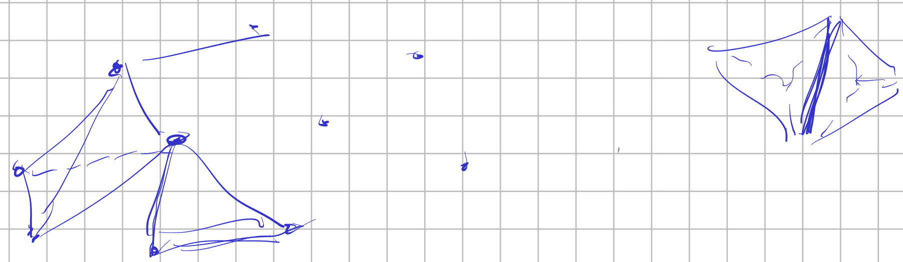
Нехай A — грань B то A і B — прав. розміщені

Бо, що $A \cap B = A$ — грань себе

$$\underbrace{B = \{x_0 \dots x_k\}}_{\bar{B}} \supset \underbrace{A = \{x_{i_0} \dots x_{i_e}\}}_{\bar{A}}$$

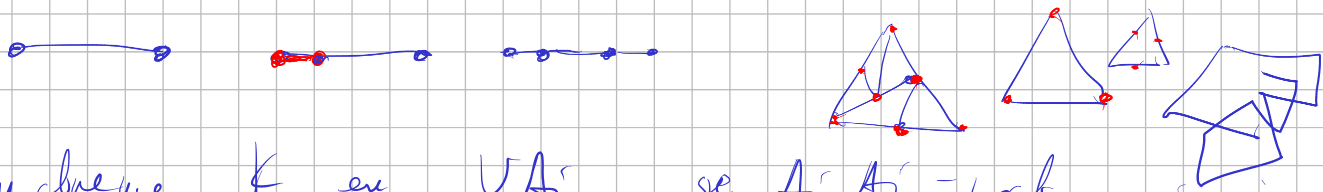
не правильне





Поліедр K в $\mathbb{R}^n$ це об'єднання скінченного числа симплексів $A_1 \dots A_l$, таких, що $\forall A_i\ A_j$ - правильно розміщені

K можна представити як об'єднання симплексів по-різному



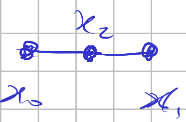
Представлення K як $\cup A_i$, де $A_i\ A_j$ - прав. розміщені називається Триангуляцією K.

Барицентричне розбиття симплекса. $A \longrightarrow \sigma(A)$

0) $\dim A = 0$ $\quad \sigma(\cdot) = \cdot \quad \sigma(A) = A \qquad A = \bigcup_i B_i$

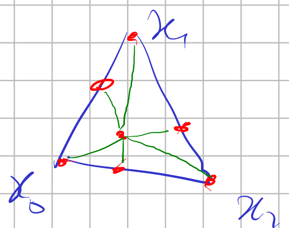
1) $\dim A = 1$ $\quad A$ вибираємо т. x_2 внутр. A

$\sigma(A)$



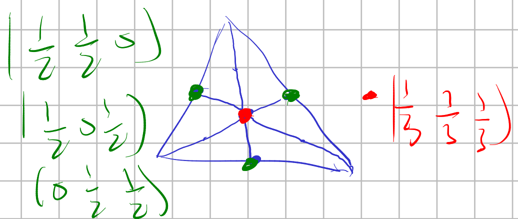
$\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$

2) $\dim A = 2$

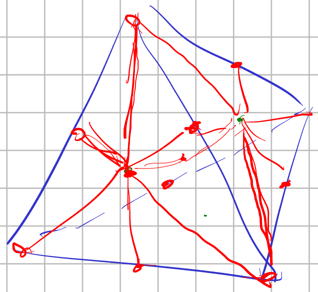


у внутрішності кожної грані беремо точку

$\sigma(A)$ — об'єднання 6 симплексів

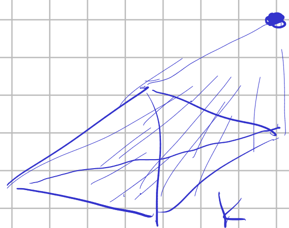


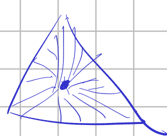
3) $\dim A = 3$



$\sigma(A)$ —

у внутр. кожної грані A вибираємо точку





Симплекс є конусом над своєю межею

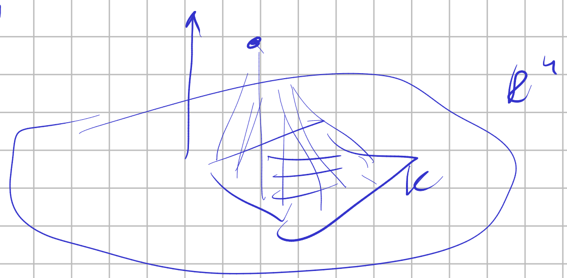
Триан. межі $\Rightarrow$ триан. симплекса.

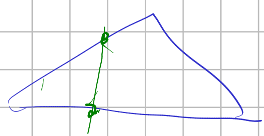
Нехай K – поліедр в $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

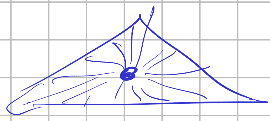
Припустимо, що $\forall a \in K$ $[x, a)$ – промінь, що виходить з x, $[x, a) \cap K = \{a\}$

Тоді $C_x K = \bigcup_{a \in K} [x, a]$ – називаємо конус над K з вершиною в т. x.

$K \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

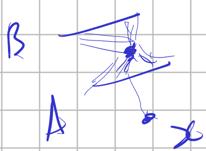


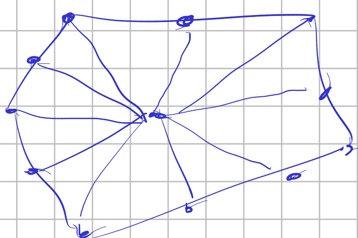




Лема. Конус над симплексом A^k є симплексом розм. $k+1$

Наслідок. Конус $C_x K$ над поліедром K (з тріангуляцією σ) є поліедром, і має "природну" тріангуляцію $C_x(\sigma)$



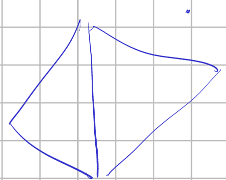


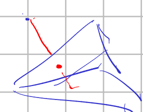
$K = \bigcup A_i$ то

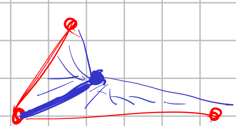
$C_x K = \bigcup \underbrace{C_x A_i}_{\text{симплекси}}$

Лема. Нехай A і B – два симплекси, які правильно перетинаються і $\exists$ конус $C_x(A \cup B)$ з вершиною в т. x.

Тоді $C_x(A \cup B) = C_x A \cup C_x B$ і $C_x A$ і $C_x B$ – правильно перетинаються.



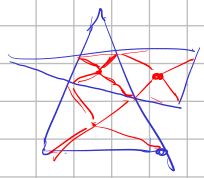




Лема Нехай $K = \bigcup A_i$ — скінченне об'єднання симплексів в $\mathbb{R}^n$

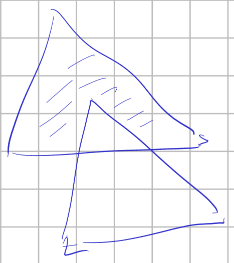
Тоді $\exists$ тріангуляції $q(A_i)$: $A_i = \bigcup_j B_{ij}$

Такі що $K = \bigcup_i \bigcup_j B_{ij}$ і B_{ij} — прав. розміщені

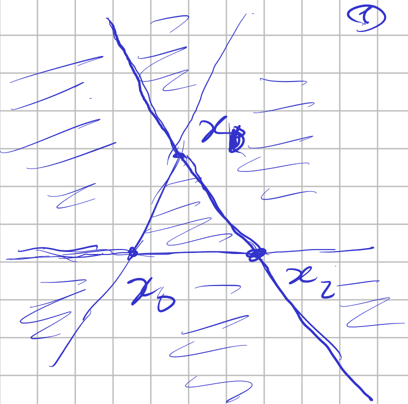


Наслідок Об'єднання скінченного числа симплексів є поліедром.

$\Downarrow$ Доведення леми



Представимо K як об'єднання скінченного числа опуклих множин



① Нехай $\dim A_i = n$ в $\mathbb{R}^n$

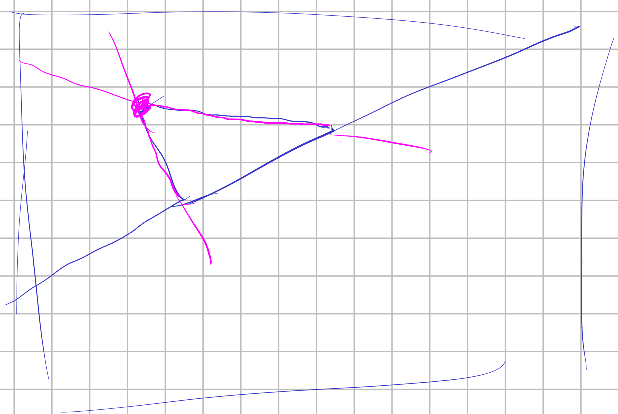
$A_i = \{x_0 \ldots x_n\}$

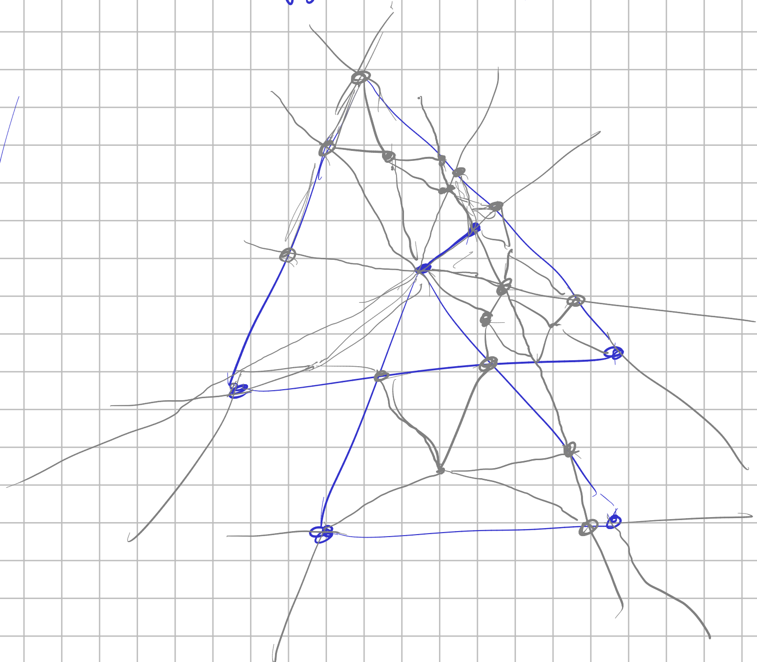
$\exists$ $n+1$ площина розм $n-1$ які проходять через грані A_i

$\{x_0 \ldots x_{n-1}\}$ викинув x_n $\{x_0 \ldots x_{n-2}, x_n\}$ викинув x_{n-1}

Тоді ці площини розбивають $\mathbb{R}^n$ на опуклі підмн-ни

② Якщо $\dim A_i < n$, то доповнимо його до n-симплекса довільним чином і проробимо конструкцію по ①

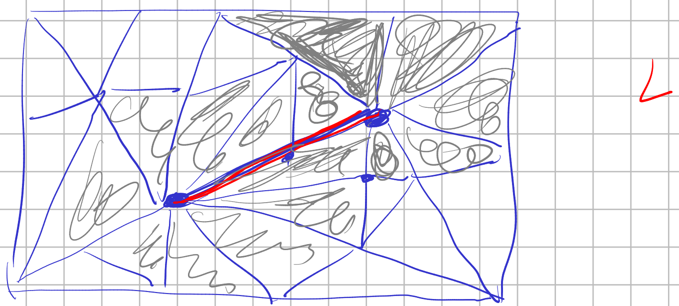




Регулярний окіл підполіедра.

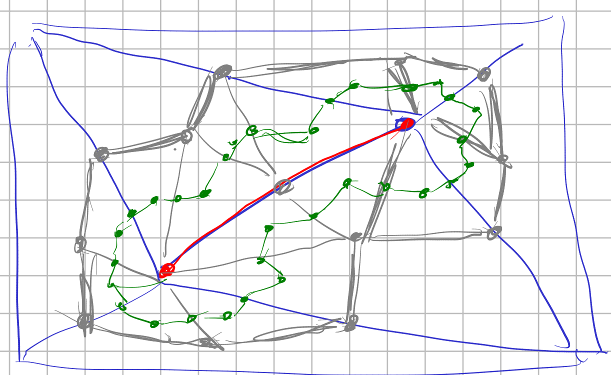
K – поліедр з триангуляцією φ. $K = \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$

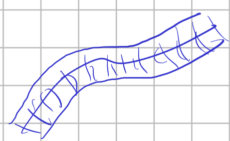
Розгл $L = \bigcup_{i \in \Psi \subset \Lambda} A_i$ – підполіедр K



① Зірка підполіедра L – об'єднання всіх симплексів в K, які перетинають L

Означення. Регулярний окіл L в K – це зірка L відносно 2-го барицентричного підрозбиття K.





Побудувати регулярні околи червоних підполіедрів